解答　2-6

平行四辺形の性質と図形の証明

〔平行四辺形の性質〕

定理証明．４

平行四辺形ＡＢＣＤにおいて、対角線ＢＤを引く

△ＡＢＤと△ＣＤＢについて、

ＡD//ＢＣより　平行線の錯角は等しいので
∠ＡＤＢ＝∠ＣＢＤ・・・①

ＡB//ＤＣより　同様に　∠ＡＢＤ＝∠ＣＤＢ・・・②

また、ＢＤは共通・・・③

①②③より１組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので、
△ＡＢＤ≡△ＣＤＢ

したがって　ＡＢ＝ＤＣ、ＡＤ＝ＢＣ

すなわち、平行四辺形の２組の対辺はそれぞれ等しい。

定理証明．５

ＡD//BC より　平行線の同位角は等しいので
∠Ａ＝∠ＰＢＣ・・・①

ＡB//ＤＣより　平行線の同位角は等しいので
∠ＰＢＣ＝∠Ｃ・・・②

①②より　∠Ａ＝∠Ｃ・・・③

また、ＡB//DC より　平行線の同位角は等しいので
∠Ａ＝∠ＣＤＱ・・・④

①④より　∠Ｂ＝∠Ｄ＝180°－∠Ａ・・・⑤

③⑤より　∠Ａ＝∠Ｃ、∠Ｂ＝∠Ｄ
すなわち平行四辺形の２組の対角は等しい。

問１　　６㎝

問２　　∠x=８０°　　∠y＝１５°

定理証明．６

△ＡＢＯと△ＣＤＯについて

平行四辺形の性質より対辺は等しいので　ＡＢ＝ＣＤ・・・①

またＡＢ//DC より　平行線の錯角は等しいので
∠ＯＡＢ＝∠ＯＣＤ・・・②
∠ＯＢＡ＝∠ＯＤＣ・・・③

①②③より　１組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので
△ＯＡＢ＝△ＯＣＤ

したがって　ＯＡ＝ＯＣ、ＯＢ＝ＯＤ

よって、平行四辺形の２つの対角線は互いの中点で交わる。

問３
（図は省略）

△ＡＰＯと△ＣＱＯについて、

平行四辺形の性質より、対角線はそれぞれの中点で交わるので
ＡＯ＝ＣＯ・・・①

ＡＤ//BC より　平行線の錯角は等しいので
∠ＯＡＰ＝∠ＯＣＱ・・・②

また、対頂角は等しいので　∠ＡＯＰ＝∠ＣＯＱ・・・③

①②③より　１組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので
△ＡＰＯ≡△ＣＱＯ

よって　ＰＯ＝ＱＯ

〔平行四辺形になるための条件〕

定理証明．７

ＡＢ＝ＤＣ、ＡＤ＝ＢＣである四角形ＡＢＣＤにおいて、
△ＡＢＤと△ＣＤＢについて

仮定より
ＡＢ＝ＣＤ・・・①
ＡＤ＝ＣＢ・・・②
またＢＤは共通・・・③

①②③より　３組の辺がそれぞれ等しいので
△ＡＢＤ≡△ＣＤＢ

したがって
∠ＡＤＢ＝∠ＣＢＤより　錯覚が等しいので　ＡＤ//BC
∠ＡＢＤ＝∠ＣＤＢより　錯覚が等しいので　ＡＢ//DC

したがって
２組の対辺がそれぞれ等しい四角形は平行四辺形である。

定理証明．８

∠Ａ＝∠Ｃ、∠Ｂ＝∠Ｄである四角形ＡＢＣＤにおいて
辺ＡＢの延長上に点Ｅをとる

∠Ａ＝∠Ｃ、∠Ｂ＝∠Ｄ　また
四角形の内角の和は 360°なので
∠Ａ＋∠Ｂ＝180°より　∠Ａ＝180°－∠Ｂ・・・①

また直線ＡＥに着目し　∠ＥＢＣ＝180°－∠Ｂ・・・②

①②より　∠Ａ＝∠ＥＢＣ
よって同位角が等しいので　ＡＤ//BC

また　∠Ａ＝∠Ｃ、∠Ａ＝∠ＥＢＣより　∠ＥＢＣ＝∠Ｃ
よって錯覚が等しいので　ＡＢ//DC

したがって、2 組の対角がそれぞれ等しい四角形は平行四辺形である。

定理証明．9

対角線の交点をＯとし、
ＯＡ＝ＯＣ、ＯＢ＝ＯＤである四角形ＡＢＣＤについて

△ＯＡＤと△ＯＣＢについて

仮定より　ＯＡ＝ＯＣ、ＯＤ＝ＯＢ
　また∠ＡＯＤ＝∠ＣＯＢ（対頂角）

よって 2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので
△ＯＡＤ≡△ＯＣＢ
したがって　∠ＯＡＤ＝∠ＯＣＢ
よって、錯覚が等しいので　ＡＤ//BC

また△ＯＡＢと△ＯＣＤについて

仮定より　ＯＡ＝ＯＣ、ＯＢ＝ＯＤ
また　∠ＡＯＢ＝∠ＣＯＤ（対頂角）

よって 2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので
△ＯＡＢ≡△ＯＣＤ

したがって　∠ＯＡＢ＝∠ＯＣＤ
よって、錯覚が等しいので　ＡＢ//DC

したがって、2 つの対角線が互いの中点で交わる四角形は平行四辺形である。

定理証明．10

ＡＤ＝ＢＣ、ＡＤ＝ＢＣである四角形ＡＢＣＤにおいて

△ＡＢＤ＝△ＣＤＢについて

仮定より　ＡＤ＝ＢＣ・・・①

またＡＤ//BC より　平行線の錯角は等しいので
∠ＡＤＢ＝∠ＣＢＤ・・・②

また、ＢＤは共通・・・③

①②③より 2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので
△ＡＢＤ≡△ＣＤＢ

ゆえに∠ＡＢＤ＝∠ＣＤＢ　錯覚が等しいので　ＡＢ//DC

したがって、1 組の対辺が平行で等しい四角形は平行四辺形である。

問 4

①ＡＢ//DC、ＡＤ//BC　　②ＡＢ＝ＤＣ、ＡＤ＝ＢＣ
③∠Ａ＝∠Ｃ、∠Ｂ＝∠Ｄ　　④ＡＯ＝ＣＯ、ＢＯ＝ＤＯ
⑤ＡＢ//DC、ＡＢ＝ＤＣ（またはＡＤ//BC、ＡＤ＝ＢＣ）

問 5

四角形ＢＱＤＰについて

平行四辺形の性質より　対辺は等しいので　ＡＤ＝ＢＣ・・・①
また仮定より　ＡＰ＝ＣＱ・・・②

①②より　ＰＤ＝ＢＱ・・・③
また　PD//BQ・・・④

③④より、1 組の対辺が平行で等しいので、
四角形ＢＱＤＰは平行四辺形である。

したがって、平行四辺形の性質より　ＢＰ＝ＤＱ

問 6

四角形ＢＣＥＦについて

四角形ＡＢＣＤは平行四辺形なので
ＡＤ//ＢＣ、ＡＤ＝ＢＣ・・・①
四角形ＦＡＤＥは平行四辺形なので
ＡＤ//ＦＥ、ＡＤ＝ＦＥ・・・②

①②より　ＢＣ//ＦＥ、ＢＣ＝ＦＥ

よって、１組の対辺が平行で等しいので
四角形ＢＣＥＦは平行四辺形である。

次に、△ＡＢＦと△ＤＣＥについて、平行四辺形の性質より、
それぞれ

▱ＡＢＣＤより　ＡＢ＝ＤＣ・・・③
▱ＦＡＤＥより　ＡＦ＝ＤＥ・・・④
▱ＢＣＥＦより　ＢＦ＝ＣＥ・・・⑤

③④⑤より３組の辺がそれぞれ等しいので　△ＡＢＦ≡△ＤＣＥ

問７

⑴四角形ＡＤＣＦについて、

仮定より　ＡＥ＝ＣＥ、ＤＥ＝ＦＥ
よって２つの対角線がそれぞれの中点で交わるので、
四角形ＡＤＣＦは平行四辺形である。

したがって、平行四辺形の性質より　対辺は等しいので
ＡＤ＝ＦＣ

⑵四角形ＢＣＦＤについて

⑴より　四角形ＡＤＣＦは平行四辺形であるので
ＡＤ//ＦＣ　すなわち　ＤＢ//FC・・・①

また仮定より　ＡＤ＝ＤＢ
⑴より　ＡＤ＝ＦＣ
よって　ＤＢ＝ＦＣ・・・②

①②より、１組の対辺が平行で等しいので
四角形ＢＣＦＤは平行四辺形である。

したがって、平行四辺形の性質より　ＢＣ＝ＤＦ

問８

△ＡＢＦと△ＣＤＨについて

▱ＡＢＣＤにおいて　平行四辺形の性質より
対辺は等しいので　ＡＢ＝ＣＤ・・・①
対角は等しいので　∠ＡＢＦ＝∠ＣＤＨ・・・②

またＢＣ＝ＡＤであり、点Ｆ、Ｈはそれぞれ辺ＢＣ、辺ＡＤの
中点であるので　ＢＦ＝ＤＨ・・・③

①②③より　２組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので
△ＡＢＦ≡△ＣＤＨ

したがって　∠ＡＦＢ＝∠ＣＨＤ・・・④

またＡＤ//ＢＣより　平行線の錯角は等しいので
∠ＨＣＦ＝∠ＣＨＤ・・・⑤

④⑤より　∠ＡＦＢ＝∠ＨＣＦ

よって同位角が等しいので
ＡＦ//ＨＣすなわちＡＰ//ＱＣ

△ＡＤＧと△ＣＢＥについて　同様に証明して
△ＡＤＧ≡△ＣＢＥより　ＡＱ//ＰＣ

以上より　四角形ＡＰＣＱは平行四辺形である。

〔特別な平行四辺形〕

問 9

▱ＡＢＣＤについて

平行四辺形の性質より　∠Ａ＝∠Ｃ、∠Ｂ＝∠Ｄ・・・①
また仮定より　∠Ａ＝∠Ｂ・・・②

①②より　∠Ａ＝∠Ｂ＝∠Ｃ＝∠Ｄ
よって▱ＡＢＣＤは長方形である。

問 10

▱ＡＢＣＤについて

平行四辺形の性質より　ＡＢ＝ＤＣ、ＢＣ＝ＡＤ・・・①
また仮定より　ＡＢ＝ＢＣ・・・②

①②より　ＡＢ＝ＢＣ＝ＣＤ＝ＤＡ
よって▱ＡＢＣＤはひし形である。

問 11

△ＡＢＣと△ＤＣＢについて

平行四辺形の性質より　対辺は等しいので　ＡＢ＝ＤＣ・・・①
長方形の性質より　∠ＡＢＣ＝∠ＤＣＢ＝90°・・・②
またＢＣは共通・・・③

①②③より　2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので
△ＡＢＣ≡△ＤＣＢ
したがって　ＡＣ＝ＤＢ

問 12

△ＡＯＢと△ＣＯＢと△ＣＯＤと△ＡＯＤについて

平行四辺形の性質より、2つの対角線は互いの中点で交わるので
ＡＯ＝ＣＯ・・・①　　　ＢＯ＝ＤＯ・・・②
ひし形の性質より　ＡＢ＝ＣＢ＝ＣＤ＝ＡＤ・・・③

①②③より　3組の辺がそれぞれ等しいので
△ＡＯＢ≡△ＣＯＢ≡△ＣＯＤ≡△ＡＯＤ

したがって　∠ＡＯＢ＝∠ＣＯＢ＝∠ＣＯＤ＝∠ＡＯＤ
また、∠ＡＯＢ＋∠ＣＯＢ＋∠ＣＯＤ＋∠ＡＯＤ＝360°　より
∠ＡＯＢ＝90°

ゆえに、ＡＣ⊥ＢＤ（ひし形の対角線は垂直に交わる）

問13　（説明は省略）

・長方形
「1つの角が90°（または∠Ａ＝∠Ｂ）」
「2つの対角線の長さが等しい」

・ひし形
「となりあう辺の長さが等しい」
「2つの対角線が垂直に交わる」

・正方形（略）

問14　（省略）

〔平行線と面積〕

問15

ＡＤ//ＢＣより　△ＡＢＣ＝△ＤＢＣ・・・①

また　△ＡＢＯ＝△ＡＢＣ－△ＯＢＣ・・・②
　　　△ＤＣＯ＝△ＤＢＣ－△ＯＢＣ・・・③

①②③より　△ＡＢＯ＝△ＤＣＯ

問16　（省略）

問17

ＡＤ//ＢＣより　△ＡＢＣ＝△ＤＢＥ・・・①
ＥＦ//ＢＤより　△ＤＢＥ＝△ＤＢＦ・・・②
ＡＢ//ＤＣより　△ＤＢＦ＝△ＤＡＦ・・・③

①②③より　△ＡＢＥ＝△ＤＡＦ