高校数学　最初の壁

〔絶 対 値〕

絶対値（ぜったいち）という言葉自体は、中学に入って数学が始まったときに、

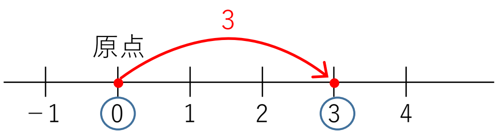
正負の数の加法（たし算）を考えるためにでてきました。

かなり久しぶりなので、言葉の意味からおさらいしておきましょう。

絶対値とは…

「数直線上で原点からの距離」　　のことです。

例えば「３」の絶対値は

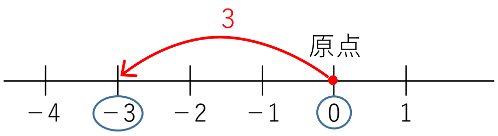


原点(0)から３までは、

３だけはなれているので

３の絶対値は ３ です。

「−3」の絶対値は

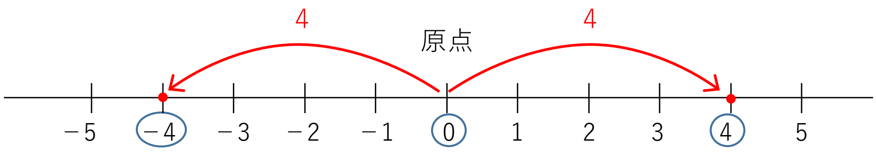


こちらも原点(０)から−3までは

３だけはなれているので、

−3の絶対値は ３ です。

逆に、例えば「絶対値が４である数は何か？」と考えた場合、答は数直線上の原点から４だけはなれた数のことなので



４と−4　　が答えになります。

絶対値を表す記号は〝｜　｜〞　です。

３の絶対値は｜３｜、−3 の絶対値は｜−3｜などと表します。

数式としてもあつかうことができ、

$|3| = 3$、$|-3| = 3$　　　などと表せます。

〝$|3| = 3$〞は３の絶対値が３であること、

〝$|-3| = 3$〞は−3 の絶対値が３であることを表しています。

とりあえずは、絶対値の中が正の数のときはそのまま絶対値が外せ、絶対値の中が負の数のときは、マイナス（−）の符号を外すと考えていいでしょう。

計算式の中にも出てきます。例題をみてみましょう。

〈例　題〉

(1)　$|5-3|$　　　(2)　$|3-5|$　　　(3)　$|5-3| - |3-5|$

(1) 絶対値の中の 5−3 を先に計算します。

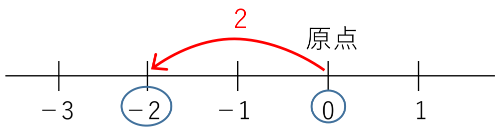
$$|5-3| = |2|$$
$$= 2$$

｜2｜となり、絶対値の記号(｜　｜)はそのまま外せ、2 になります。

(2) 計算をすすめると｜−2｜となります。

改めて確認しますと、｜−2｜は数直線上で−2 が原点(0)からどれだけ離れているか(0 から−2 までの距離)を意味します。

よって｜−2｜=2 です。



$$|3-5| = |-2|$$
$$= 2$$

(3)　「絶対値の中の計算」⟶「絶対値を外す」⟶ ……

のように、1行に1手ずつ計算をすすめましょう。

$$
\begin{aligned}
|5-3|-|3-5| &= |2| - |-2| \\
&= 2-2 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

① この「−」はそのまま

② $|-2|=|2|$

※これらの問題は、$|5-3|$ と $|3-5|$ が同じものであること、

すなわち、a，b を実数として(実数とはふつうの数のことです)、

$|a-b|$ と $|b-a|$ は同じものであることを示しています。($|a-b|=|b-a|$)

これについては、必要なときにまた改めて解説します。

次に絶対値の中に無理数($\sqrt{\ }$ で表す数など)がある場合を考えてみましょう。

〈例　題〉

$|\sqrt{2}-1|-|\sqrt{2}-2|$　　を計算せよ。

$\sqrt{2}$ は $\sqrt{1}$ と $\sqrt{4}$ の間にあるので　$(\underbrace{\sqrt{1}}_{=1}<\sqrt{2}<\underbrace{\sqrt{4}}_{=2})$、

1と2の間にある数なのでその整数部分は1、すなわち　$\sqrt{2}=1.\times\times\times\cdots\cdots$ という数とわかります。(無理数の大きさはこのように考えるものですが、

近似値　$\sqrt{2}\fallingdotseq 1.414$　くらいは覚えておきましょう)

$\sqrt{2}$　は1より大きいので「$\sqrt{2}-1$」は正の数です。

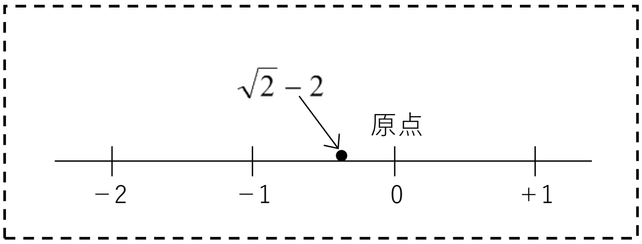
よって〝$|\sqrt{2}-1|=\sqrt{2}-1$〟　とそのまま絶対値を外してかまいません。

問題は $|\sqrt{2}-2|$　です。

$\sqrt{2}$　は2より小さいので、$\sqrt{2}-2$　は負の数です。($\sqrt{2}-2<0$)

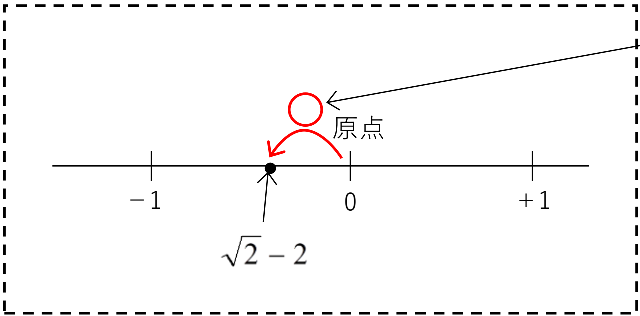
ですから、そのまま絶対値をはずすわけにはいけません。
絶対値の定義にもどって、どうしたらよいか考えてみましょう。

$\sqrt{2} \fallingdotseq 1.41\cdots$とすると　$\sqrt{2}-2 \fallingdotseq -0.59$　くらいです。
よって数直線上で　$\sqrt{2}-2$　は



です。

絶対値とは、数直線上で原点(0)からの距離のことでした。
ですから



この部分の長さが、
$\sqrt{2}-2$の絶対値($|\sqrt{2}-2|$)になります。

この長さがどうなっているか？
(長さなので必ず正の数です)
一般的な場合から考えてみましょう。

「$|a|$」と与えられているとします。
　aは1、2、3、…のような正の数かもしれませんし、
　−1、−2、−3、…のような負の数かもしれません。

aが正の数または0ならば、絶対値はそのまま外せ
$|a| = a$　とすることができます。

aが負の数の場合、×$|a| = a$　のように絶対値をそのままはずしてはいけません。
絶対値とはその数が原点からどれだけ離れているかを示すので、正の数であるはずなのに、aは負の数だからです。

ではどうしたらいいでしょうか？

次ページへ

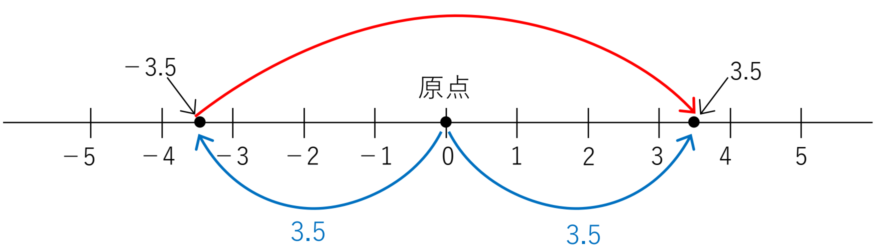
$|-2|=2$、$|-3.5|=3.5$ など簡単な数値である場合、マイナス(－)の符号をとるだけで絶対値をはずせました。

では、a が負の数のときの $|a|$ や、例題の $|\sqrt{2}-2|$ など、絶対値の中の値が負の数とわかっているとき、絶対値の記号をどうはずせばよいか考えていきましょう。

簡単な例をもう一度みてみましょう。

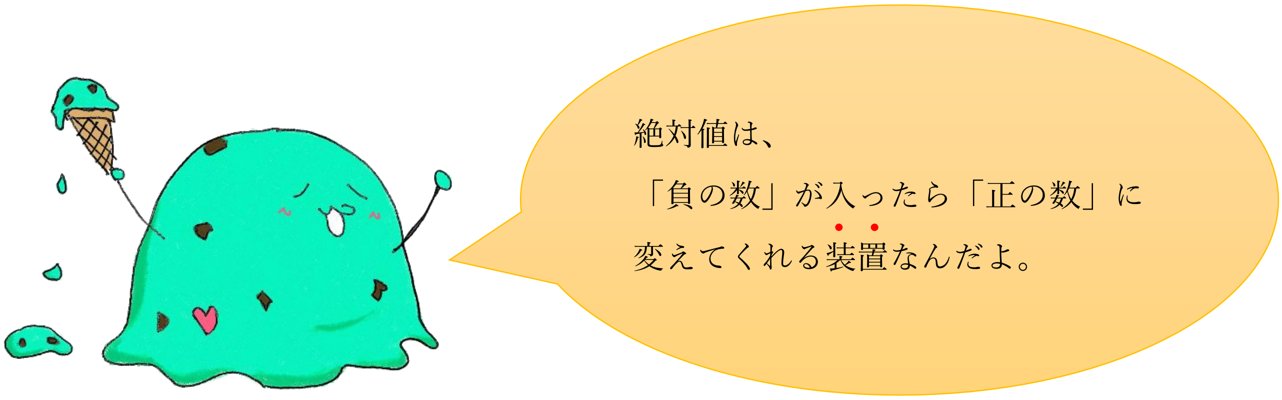
$|-2|=2$、$|-3.5|=3.5$ において、

〝$-2 \to 2$〞、〝$-3.5 \to 3.5$〞と負の数がその絶対値をかえず正の数になることで、絶対値の記号が外れていることがわかります。



↑ -3.5 と 3.5 の絶対値は同じです。

ここで絶対値とは何か？　次のように考えてみましょう。



装置ととらえるのがいいでしょうね。

絶対値とは、「正の数」が入ればそのまま「正の数」、

「負の数」が入れば「正の数」に変えて出す装置です。